問題番号	問い	２次不等式　$\chi^2-4\chi+5>0$　を解きなさい。
１９	正解	すべての実数

誤　答　例		つ ま ず き 原 因	分析と解消
1	無解答	２次不等式を解く意味を理解していない。	５０ページ 【１９－１】
2	$\chi<-1$，$5<\chi$	誤った因数分解を行ってしまった。	２１ページ 【８－１】
3	解なし	２次方程式としてみた場合の「解なし」をそのまま適用した。	５１ページ 【１９－２】
4			

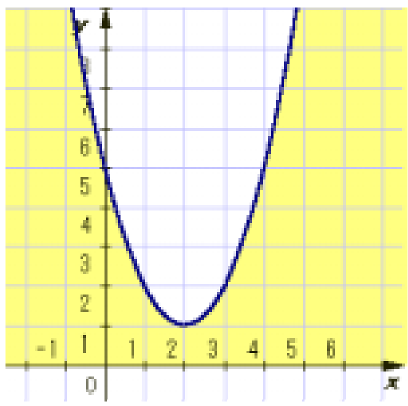
正解の解説１

$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなして描いてみると

$y=(\chi-2)^2+1$

と変形できるので，右のような頂点が$(2,\ 1)$の下に凸の放物線のグラフとなる。

よって，$\chi^2-4\chi+5>0$の解は，<u>すべての実数</u>である。



正解の解説２

方程式とみなして，判別式をとると

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$となり，

解がないことがわかる。

これは　$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたグラフが，χ軸と共有点をもたないことと同じである。χ^2の係数>0なので，グラフは下に凸。

よって，$\chi^2-4\chi+5>0$の解は，<u>すべての実数</u>である。

正解の解説３

$\chi^2-4\chi+5$　は　$(\chi-2)^2+1$と変形できる。

すべての実数χについて，$(\chi-2)^2\geqq0$，これに$+1$をしているので，

$(\chi-2)^2+1>0$

よって，$\chi^2-4\chi+5>0$の解は，<u>すべての実数</u>である。

練習	次の２次不等式を解きなさい。 (1)　$\chi^2-4\chi+7>0$ (2)　$\chi^2-2\chi+3>0$ (3)　$2\chi^2-4\chi+5>0$
解答	(1)　すべての実数 (2)　すべての実数 (3)　すべての実数

誤答例１のつまずきの分析【１９－１】

２次関数のグラフを描くことができないと思われます。２次関数のグラフを描けるようになることが，２次不等式を確実に解けるようになる近道です。特に頂点の座標を求めることと，グラフが上に凸か下に凸かの判断することが重要です。

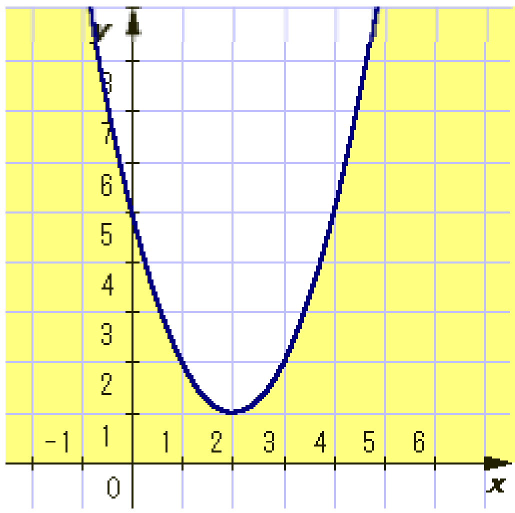
つまずきの解消

$\chi^2-4\chi+5>0$ を解くということは，$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたとき，常に $y>0$ となるような，χ の値の範囲を求めることです。

そこでまず，６０ページで２次関数のグラフを描くための式変形を確認しましょう。

$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなして，このグラフを描いてみます。
$y=\chi^2-4\chi+5$　の式は　　$y=(\chi-2)^2+1$

と変形できるので，右のように頂点は$(2,1)$，下に凸の放物線のグラフになります。



このことから，χ のすべての値に対して，$y>0$ となります。実際，主な値の変化を調べてみると，以下のようになり，y の値は常に正になると予想されます。

χ	…	0	1	2	3	4	…
y	…	5	2	1	2	5	…

このことをグラフを活用して確認すれば，$\chi^2-4\chi+5>0$ の解は，<u>すべての実数</u>です。

誤答例１のつまずきの分析【１９－１】

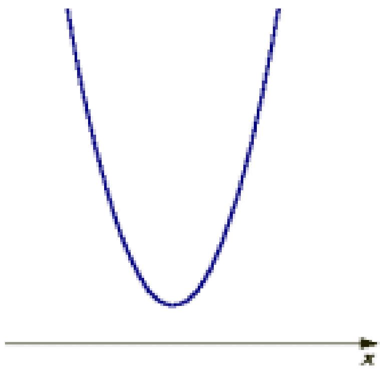
判別式をうまく利用できないと思われます。このような２次不等式はグラフをかく方法の他に，判別式とグラフが上に凸か下に凸かの判断することで解く方法もあります。判別式を利用することは，グラフを描く場合，予想を立てることができて便利です。

つまずきの解消

判別式を利用して，２次不等式を解くことができます。
そこでまず，６０ページで判別式と２次不等式の解との関係について確認しましょう。

ここでは，$\chi^2-4\chi+5=0$ とみなして判別式をとると
$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$
となり，この方程式は解がないことがわかります。

これは　$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたグラフが，χ 軸と共有点を持たないことと同じです。
χ^2 の係数 >0 なので，グラフは下に凸の右のようなグラフになります。



よって，$\chi^2-4\chi+5>0$ の解は，
<u>すべての実数</u>です。

誤答例２のつまずきの分析【１９－２】

２次方程式と２次不等式の関係を理解していないと思われます。$\chi^2-4\chi+5=0$ とみなした２次方程式に解が無くても，$\chi^2-4\chi+5>0$ の２次不等式にも解が無いとは限りません。$y=\chi^2-4\chi+5$ のグラフの概形をつかむことが大切です。

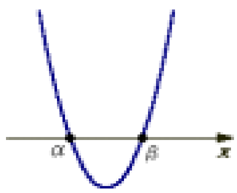
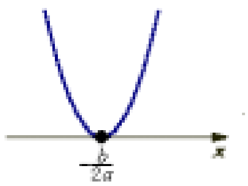
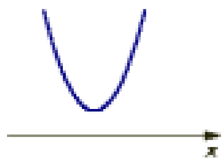
つまずきの解消

ここでは，$\chi^2-4\chi+5=0$ とみなして，判別式をとると
$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$ となり，この方程式は解が無いことがわかります。

しかしながら，$\chi^2-4\chi+5>0$ を解くということは，$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたとき，常に $y>0$ となるような，χ の値の範囲を求めることです。

つまずきの分析と解消１９－１ページに戻ってみましょう。また，２３ページで２次関数と判別式について確認しましょう。

また，$a>0$ の場合について，$a\chi^2+b\chi+c=0$ と $a\chi^2+b\chi+c>0$，及び，$a\chi^2+b\chi+c<0$ との関係をまとめると次の表のようになっています。２次方程式に解が無いからといって，２次不等式にも解が無いとは限りません。

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=a\chi^2+b\chi+c$ のグラフ（$a>0$ の場合）			
２次方程式 $a\chi^2+b\chi+c=0$ の解	$\chi=\alpha,\ \beta$	重解　$\chi=-\dfrac{b}{2a}$	解はない
２次不等式 $a\chi^2+b\chi+c>0$ の解	$\chi<\alpha,\ \beta<\chi$	$-\dfrac{b}{2a}$ を除くすべての数	すべての数
$a\chi^2+b\chi+c<0$ の解	$\alpha<\chi<\beta$	解はない	解はない

問題番号	問い	２次不等式　$\chi^2-4\chi+4\leqq 0$　を解きなさい。
２０	正解	$\chi=2$

誤　答　例		つ ま ず き 原 因	分析と解消
1	無解答	２次不等式を解く意味を理解していない。	５３ページ 【２０－１】
2	$-2\leqq\chi\leqq 2$	因数分解が正しく出来ない。	２１ページ 【８－１】
3	解なし	グラフは正しくかけたが，グラフと解の関係を理解していない。	５３ページ 【２０－１】
4	すべての実数	グラフは正しくかけたが，グラフと解の関係を理解していない。	５３ページ 【２０－１】
5	$\chi=2$以外の すべての実数	不等号の向きを逆に捉えている。	５４ページ 【２０－２】

正解の解説

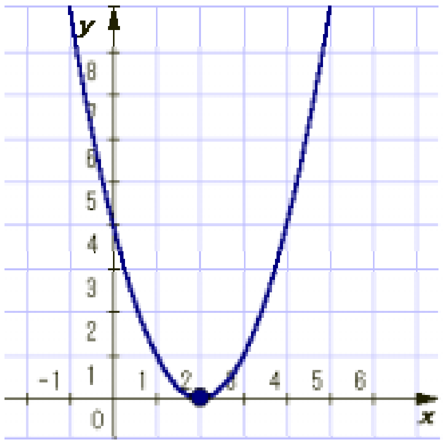
$y=\chi^2-4\chi+4$　のグラフを描いてみると

$y=(\chi-2)^2$

と変形できることから，頂点は(２，０)の下に凸の放物線のグラフとなる。

よって，$\chi^2-4\chi+4\leqq 0$の解は，

$\underline{\chi=2}$のみである。



練習	次の２次不等式を解きなさい。 (1)　$\chi^2-6\chi+9\leqq 0$ (2)　$\chi^2-8\chi+16\leqq 0$
解答	(1)　$\chi=3$ (2)　$\chi=4$

誤答例１のつまずきの分析【２０－１】

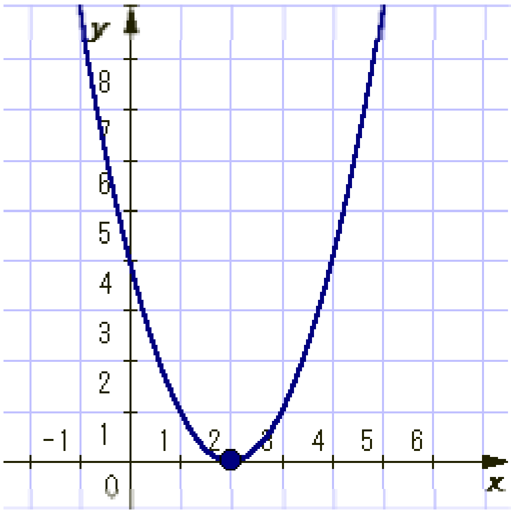
２次関数のグラフをかくことができないと思われます。２次関数のグラフを描けるようになることが，２次不等式が確実に解けるようになる近道です。この場合は特に頂点がχ軸上にありますから，グラフが上に凸か下に凸かの判断が重要です。

つまずきの解消

２次関数のグラフの概形について１９－１で確認しましょう。

$y=\chi^2-4\chi+4$ のグラフを描いてみると
$y=(\chi-2)^2$

と変形できることから，頂点が$(2,\ 0)$の下に凸の放物線のグラフとなります。



よって，$\chi=2$のとき，等号が成り立ちます。χがこれ以外の値のときは，$\chi^2-4\chi+4>0$ となっています。

したがって，$\chi^2-4\chi+4\leqq 0$ の解は，
<u>$\chi=2$のみ</u>です。

誤答例２のつまずきの分析【２０－２】

不等号の向きを逆にとらえてしまったようです。また，等号があるか無いかも要注意です。$\chi^2-4\chi+4\leqq 0$ を解くということは，$y=\chi^2-4\chi+4$ とみなしたとき，常に $y\leqq 0$ となるような，χ の値の範囲を求めることです。つまり，$y=0$ を満たすか，または $y<0$ となる，そのような χ の値の範囲を求めることです。

つまずきの解消

$\chi^2-4\chi+4\leqq 0$ を解くということは，$y=\chi^2-4\chi+4$ とみなしたとき，常に $y\leqq 0$ となるような，χ の値の範囲を求めることです。
そこで，$y=\chi^2-4\chi+4$ として変形すると

$$
\begin{aligned}
y &= \chi^2-4\chi+4 \\
&= (\chi-2)^2
\end{aligned}
$$

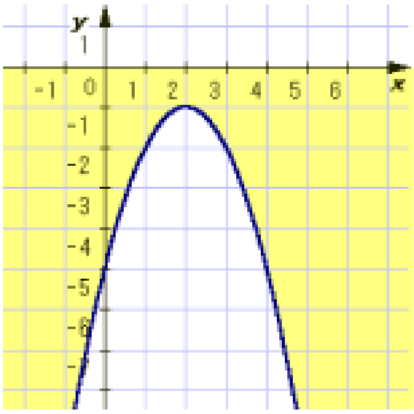
となるので，$\chi=2$ のとき，$y=0$ となります。
χ の値がこれ以外のとき，$y>0$ となります。

したがって，$\chi^2-4\chi+4\leqq 0$ の解は，等号の成り立つ $\underline{\chi=2}$ のみです。

問題番号	問い	2次不等式　$-\chi^2+4\chi-5<0$　を解きなさい。
21	正解	すべての実数

	誤答例	つまずき原因	分析と解消
1	無解答	2次不等式を解く意味を理解していない。	56ページ【21－1】
2	$-1<\chi<5$	因数分解が正しくできない。	21ページ【8－1】
3	解なし	不等式の性質を理解していない。	57ページ【21－2】

正解の解説 1



$y=-\chi^2+4\chi-5$　のグラフを描いてみると
$y=-(\chi-2)^2-1$
と変形できるので，頂点は$(2,\ -1)$の下に凸の放物線のグラフとなる。
よって，$-\chi^2+4\chi-5<0$の解は，
すべての実数である。

正解の解説2

方程式とみなして，判別式をとると
$D=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-4<0$となり，
解が無いことがわかる。
これは　$y=-\chi^2+4\chi-5$　とみなしたグラフが，χ軸と共有点をもたないことと同じである。χ^2の係数<0なので，グラフは上に凸の放物線。
よって，$-\chi^2+4\chi-5>0$の解は，すべての実数である。

正解の解説3

$-\chi^2+4\chi-5$　は　$-(\chi-2)^2-1$と変形できる。
すべての実数χについて，$-(\chi-2)^2\leqq 0$，これに-1を加えているので，
$-(\chi-2)^2-1<0$
よって，$-\chi^2+4\chi-5<0$の解は，すべての実数である。

正解の解説4

$-\chi^2+4\chi-5<0$の両辺に-1をかけると　$\chi^2-4\chi+5>0$となり，
問題19と同じになる。このように変形してから不等式を解くことも考えられる。

練習	次の2次不等式を解きなさい。 (1)　$-\chi^2+4\chi-7<0$ (2)　$-2\chi^2+4\chi-9>0$
解答	(1) すべての実数 (2) 解なし

誤答例１のつまずきの分析【２１－１】

２次関数のグラフを描くことができないと思われます。２次関数のグラフがかけるようになることが，２次不等式が確実に解けるようになる近道です。特に頂点の座標を求めることと，グラフが上に凸か下に凸かの判断することが重要です。

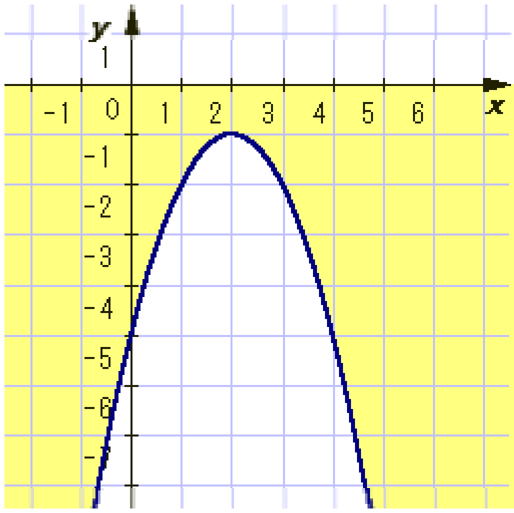
つまずきの解消１

$-\chi^2+4\chi-5<0$ を解くということは，$y=-\chi^2+4\chi-5$　とみなしたとき，常に $y<0$ となるような，χ の値の範囲を求めることです。

そこでまず，２３ページで２次関数のグラフを描くための式変形を確認しましょう。

$y=-\chi^2+4\chi-5$　のグラフを描いてみると
$y=-(\chi-2)^2-1$

と変形できるので，頂点は(２，－１)の下に凸の放物線のグラフとなります。
よって，$-\chi^2+4\chi-5<0$ の解は，
すべての実数です。



誤答例１のつまずきの分析【２１－１】

判別式をうまく利用できないと思われます。このような２次不等式はグラフをかく方法の他に，判別式とグラフが上に凸か下に凸かの判断で解く方法もあります。判別式を利用することは，グラフを描く場合便利です。

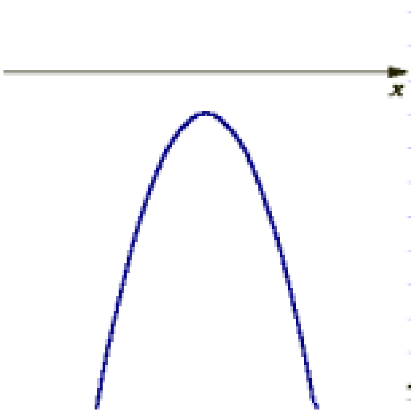
つまずきの解消

判別式を利用して，２次不等式を解くことができます。
そこでまず，２３ページで判別式と２次不等式の解との関係について確認しましょう。

ここでは，$-\chi^2+4\chi-5=0$ とみなして，判別式をとると
$D=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-4<0$ となり，この方程式は解がないことがわかります。

これは　$y=-\chi^2+4\chi-5$　とみなしたグラフが，
χ 軸と共有点を持たないことと同じです。
χ^2 の係数＜０なので，グラフは上に凸。

よって，$-\chi^2+4\chi-5<0$ の解は，
すべての実数です。



誤答例３のつまずきの分析【２１－２】

　不等式の性質を正しく理解していないと思われます。不等式では両辺に負の数をかけると不等号の向きが変わりますから，２次不等式を解く上でも，この性質を確認しておくことは重要です。

つまずきの解消

　１７－１ページに戻って，χ^2の係数＜０であるときの，２次不等式の解き方を理解しましょう。

　$-\chi^2+4\chi-5<0$　はまず両辺に－１をかけると
　　$\chi^2-4\chi+5>0$　となります。

　この式で考えればよいわけです。

問題番号	問い	2次不等式　$\chi^2-6\chi+9>0$　を解きなさい。
22	正解	$\chi=3$ 以外のすべての実数

	誤　答　例	つ ま ず き 原 因	分析と解消
1	無回答	2次不等式を解くことの意味を理解していない。	59ページ 【22－1】
2	$-3<\chi<3$	因数分解が正しくできない。	21ページ 【8－1】
3	$\chi=3$ のみ	不等号の意味を理解していない。	9ページ 【4－1】
4	解なし	不等号の意味を理解していない。	46ページ 【17－1】
5			

正解の解説

$y=\chi^2-6\chi+9$　のグラフを描いてみると

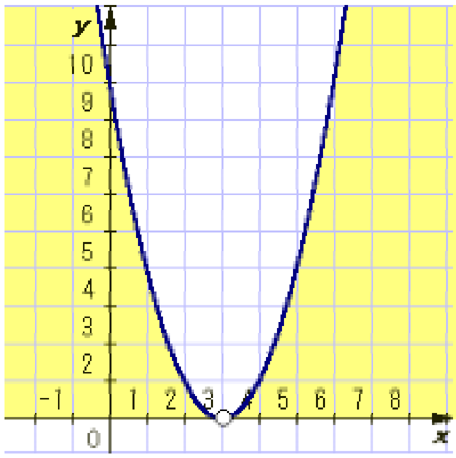
$(\chi-3)^2$

と変形できることから，右のような頂点(3，0)の下に凸の放物線のグラフとなる。

$\chi=3$　のとき，$y=0$ となるので，よって，

$\chi^2-6\chi+9>0$ の解は，

<u>$\chi=3$ 以外の実数</u>である。



練習	次の2次不等式を解きなさい。 (1)　$\chi^2-4\chi+4>0$ (2)　$\chi^2-8\chi+16>0$
解答	(1)　$\chi=2$ 以外のすべての実数 (2)　$\chi=4$ 以外のすべての実数

誤答例１のつまずきの分析【２２－１】

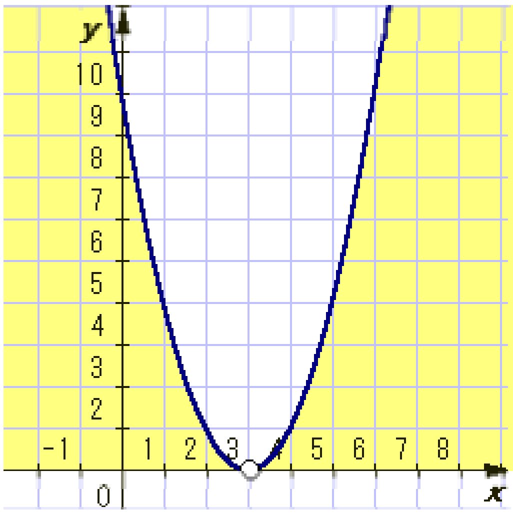
２次関数のグラフをかくことができないと思われます。２次関数のグラフがかけるようになることが，２次不等式が確実に解けるようになる近道です。この場合は特に頂点がχ軸上にありますから，グラフの上に凸か下に凸かの判断が重要です。また，等号がついているか，ついていないかについても見分けましょう。

つまずきの解消

２次関数のグラフの概形について１９－１ページで確認しましょう。

$y=\chi^2-6\chi+9$　のグラフを描いてみると
$y=(\chi-3)^2$

と変形できることから，右のような
頂点(３，０)の下に凸の放物線のグラフとなります。



$\chi=3$　のとき，$y=0$となるので，
よって，$\chi^2-6\chi+9>0$の解は，

<u>$\chi=3$以外の実数</u>です。